

Dag 1: Algebra

Sarah Alsaadi

Augusti, 20, 2019

- 1 Tal
- 2 Potenser
- 3 Prioriteringsreglerna
- 4 Primal och primtalsfaktorisering
- 5 Konjugatregeln och kvadreringsreglerna
- 6 Polynom
- 7 Polynomekvationer
- 8 Linjära ekvationssystem
- 9 Logaritm och exponential ekvationer

Definition av olika tal

- 1 Positiva heltal $\mathbb{Z}_+$
- 2 Heltal $\mathbb{Z}$
- 3 Rationella tal $\mathbb{Q}$, alla tal på formen $\frac{a}{b}$ som exempelvis $\frac{2}{4}$, dvs bråk
- 4 Irrationella tal, alla tal som inte kan skrivas på formen $\frac{a}{b}$ som exempelvis $\sqrt{2}$
- 5 Reella tal $\mathbb{R}$, alla på en tallinje
- 6 Komplexa tal $\mathbb{C}$, alla tal på formen $a + b * i$ där $i^2 = -1$

Definition av potens

- $x^m = x * x * \dots * x$, m gånger
- *basen* är x och *exponenten* är m

Räkne regler

- $x^m * x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{m*n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $x^0 = 1$ och $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ om $x \neq 0$
- $(xy)^m = x^m * y^m$ och $(\frac{x}{y})^m = \frac{x^m}{y^m}$
- $x^{\frac{1}{n}}$ är det POSITIVA talet y som uppfyller $y^n = x$

Prioriteringsreglerna

- 1 Parenteser.
- 2 Potenser.
- 3 Multiplikation och division.
- 4 Addition och subtraktion.
- 5 Kom ihåg: $2 - (-4) = 2 + 4 = 6$ och $(-4) * (-4) = 4 * 4 = 16$.

Definition av ett sammansatt tal

Ett positivt heltal $a > 1$ är sammansatt om det kan skrivas som en produkt av två heltal b och c som är större än ett, det vill säga $a = bc$, där $b > 1$ och $c > 1$.

Definition av ett primtal

Ett positivt heltal som är större än ett och som inte är sammansatt kallas för primtal.

Exempel

- Talen 2, 3, 5, 7, 11 är exempel på primtal.
- Talen $4 = 2^2$, $6 = 2 * 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 * 5$ är exempel på sammansatta tal .
- Ett heltal större än 1 är antingen ett sammansatt tal eller ett primtal.

Primtalsfaktorisering

- Alla sammansatta tal har en unik primtalsfaktorisering.

- Exempelvis så är

$$520 = 2 * 260 = 2 * 2 * 130 = 2 * 2 * 2 * 65 = 2 * 2 * 2 * 5 * 13 = 2^3 * 5 * 13$$

Konjugatregeln och kvadreringsreglerna

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

- $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$

Definition av polynom

Ett polynom $p(x)$ av *grad* n i en variabel x är ett uttryck på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Definition av rationella uttryck

- Ett bråk där täljaren och nämnaren är polynom.

Polynomdivision

- Lättast med exempel.

Definition av polynomekvationer

$p(x) = 0$ är en polynomekvation. En ekvation har alltid ett vänsterled som är lika med ett högerled.

Exempel

- Förstgradsekvation $x + 7 = 30 \leftrightarrow x - 23 = 0$
- Andragradsekvation $y^2 + 2y + 1 = 0$
- Två olika uttryck som uttrycker samma sak.
- Innehåller variabler (något okänt) som man vill hitta så att ekvationen stämmer.
- Strategi: se en ekvation som en våg, det som är till höger om $=$ är lika med det som är till vänster. Gör vad du vill så länge du gör det på båda sidorna. Målet är att ha alla okända på en sida och alla kända på andra sidan.

Andragradsekvationer

- Viktigt: $x^2 = 4$ har lösningarna $x_1 = -2$ och $x_2 = 2$ men $\sqrt{x^2} \geq 0$ så att $\sqrt{4} = 2$ och $\sqrt{4} \neq -2$.
- $ax^2 + bx + c = 0$.
- $ax^2 + bx + c = 0$ kan skrivas om som $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.
- Sätt $p = \frac{b}{a}$ och $q = \frac{c}{a}$.
- pq-formeln: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Linjära ekvationssystem

- En linjär ekvation i variablerna (x, y) är en ekvation som kan skrivas på formen $ax + by = c$ där a, b, c är vanliga tal.
- Ett linjärt ekvationssystem är en samling av linjära ekvationer för samma variabler.

Exempel

- Exempel på en linjär ekvation i variablerna (x, y) är

$$2x + 4y = 3$$

- Exempel på ett linjärt ekvationssystem i variablerna (x, y) är

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Bestäm (x, y) som en lösning till båda ekvationerna SAMTIDIGT.

Lösning

Att lösa ekvationssystemet innebär att hitta (x, y) som gör att alla ekvationer uppfylls samtidigt. Det finns flera sätt att lösa ekvationssystem.

- Algebraisk lösning.
- Grafisk lösning.

Algebraisk lösning

Här finns det två metoder

- Substitutionsmetoden.
- Additionsmetoden.

Fördelen med algebraisk lösning är att vi får exakta värden.

Matris

$$\left(\begin{array}{cc|c} x & y & = \\ 3 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

Tänk på en matris som en enkel och kompakt form som innehåller all nödvändig information som behövs (i detta fall, all nödvändig information för att lösa ekvationssystemet).

Exponentialekvationer

- Ekvationer på formen $a^x = b$ för $a > 0$
- Dessa är ekvivalenta med $x = \log_a(b)$ för $a > 0$
- Exempelvis: $10^x = 10^2$ har lösningen $\log_{10}(10^x) = \log_{10}(10^2)$, dvs $x = 2$.

Logaritmekvationer

- Ekvationer på formen $\log_a(x) = b$ för $a > 0, a \neq 1$ och $x > 0$
- Dessa är ekvivalenta med $x = a^b$ för $a > 0, a \neq 1$ och $x > 0$
- Exempelvis: $\log_{10}(x) = 2$ har lösningen $10^{\log_{10}(x)} = 10^2$, dvs $x = 10^2$.

Logaritmlagarna

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(x^p) = p * \log(x)$ där p är ett reellt tal.